СЕРИЯ «НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЕ ЗАДАЧИ»

ЭЛЕМЕНТЫ

Вот уже больше десяти лет каждую неделю на сайте «Элементы» выходит новая задача — по физике, математике, лингвистике, биологии, химии или даже по астрономии, экономике, археологии. В понедельник публикуется условие, в среду — одна или несколько подсказок, в пятницу — решение и научно-популярное послесловие. Эту структуру мы оставили и в книге, прибегнув к небольшим хитростям, чтобы подсказка и решение не попались вам на глаза раньше времени.

Ради послесловия — рассказа о том, как затронутые в задаче вопросы решаются в науке и в жизни, — и был придуман этот жанр. Послесловие превращает задачу в научно-популярную статью — и уже не так важно, удалось ли вам ее решить, вы получите удовольствие в любом случае.

Серию открывают сборники задач по физике и лингвистике. Готовятся к выходу математика и биология. А на **elementy.ru/problems** вас всегда ждет свежая задача.

Увлекательного вам чтения!
Редакция «Элементов»

Как ломаются спагетти

и другие задачи по физике

АЛЬПИНА НОН-ФИКШН

Элементы

Москва
2022

УДК 53
ББК 22.3
И20

Редактор Антон Никольский

Иванов И.

И20 Как ломаются спагетти и другие задачи по физике / Игорь Иванов. — М. : Альпина нон-фикшн, 2022. — 320 с. — (Серия «Научно-популярные задачи»).

ISBN 978-5-00139-531-7

Эта книга — задачник по физике, но задачник необычный. Здесь вы не встретите знакомых сюжетов, которые порой навевают тоску: авторские задачи-миниатюры знакомят вас с яркими природными явлениями или необычными закономерностями из самых разных разделов физики. Вы удивитесь: несмотря на то что предлагаемые задачи выходят далеко за пределы школьной и даже университетской программы, благодаря предисловию и подсказкам они вполне по силам любознательному школьнику. А завершает каждую задачу научно-популярное послесловие — рассказ о том, как с этим вопросом разбираются сами ученые. Автор приглашает к разговору о современной физике всех, кому недостаточно кратких новостей науки.

Книга выходит в серии «Научно-популярные задачи».

УДК 53
ББК 22.3

Э Л Е М Е Н Т Ы

Задачи, вошедшие в сборник, были опубликованы на сайте «Элементы» (**elementy.ru**). Издательство благодарит редакцию сайта за активное участие в подготовке сборника к изданию и Фонд развития теоретической физики и математики «Базис» — за предоставление прав на публикацию задач.

Фонд «Базис» основан в 2016 году. Миссия Фонда — системная поддержка и развитие фундаментальной науки, прежде всего физики и математики, в России, поддержка и повышение уровня образования в этих областях, содействие международному научному сотрудничеству российских ученых, повышение интереса молодежи к науке.

ISBN 978-5-00139-531-7

Содержание

ОПТИКА

МАГНЕТИЗМ

АТОМНАЯ ФИЗИКА

МИКРОМИР И КОСМОС

Предисловие

В средних классах школы во мне странным образом уживались два разных отношения к физике. Школьную физику я учил более-менее хорошо, на твердую четверочку, но никакого воодушевления она у меня не вызывала. Грузики на наклонной плоскости, пружинки жесткости k, сообщающиеся сосуды, провода с током... Даже если иногда приходилось решать задачи «со звездочкой», задачи повышенной трудности, это были все те же грузики и пружинки, только более запутанные. Зато дома я зачитывался литературой по элементарным частицам, черным дырам, космосу и термоядерному синтезу. Вот это реальная физика, настоящая, восхитительная — ожившая научная фантастика! А школьная физика — так, пыль.

Затем была новосибирская физматшкола с ее уникальными, совершенно нескучными курсами физики. Шикарные лекции по физике нам читал Михаил Алексеевич Могилевский, а параллельно шли факультативные курсы по физике полупроводников, квантовой механике, элементарным частицам. И я, тогдашний школьник, с удивлением осознал, что некоторые вопросы из современной физики я способен постигать количественно, через решение задач, специально адаптированных для продвинутых школьников. Конечно, до настоящей исследовательской науки было еще очень далеко. Но тот разрыв между школьной и современной физикой, который раньше ощущался как безбрежная и бездонная пропасть, вдруг стал обозримым.

Методы и закономерности современной физики перестают казаться таинственными чудесами, если сам способен сосчитать что-то оттуда, пусть даже совсем элементарное и с подсказками. Я уверен, что любой человек, интересующийся современной физикой, пусть и без специального физического образования, имеет право и возможность совершить этот прыжок. Искренне надеюсь, что собранные в этой книжке задачи помогут вам испытать интеллектуальное удовольствие.

Перед вами — задачи не повышенной трудности, а повышенной интересности. Они не натренируют вас на сдачу ЕГЭ или на решение олимпиадных задач. Они подарят удовольствие от более тесного знакомства с окружающей физической реальностью, позволят вам «пощупать руками» современную физику. Некоторые из них очень простые, другие посложнее, отдельные задачи — трудные; уровень задач отмечен звездочками. Но все их объединяет одно: они опираются на школьный багаж знаний, дополненный иногда научно-популярными материалами, и при этом так или иначе касаются реальных научных исследований.

Типы заданий тут самые разные. Есть задачи вычислительные: они, хоть и выглядят технически как школьные задачки, по сути представляют собой упрощенный анализ какой-то реальной ситуации из современной физики. Есть также целый класс задач-оценок. В них не требуется получить точный ответ; более того, какого-то единственного, абсолютно правильного ответа может и не оказаться. В них надо лишь найти главные зависимости между величинами — и именно это будет считаться решением задачи, что, между прочим, в современной физике встречается сплошь и рядом. Наконец, есть задачи на «подумать», в которых вообще не требуется что-то вычислять. Вся суть таких задач — разобраться с явлением и получить удовлетворяющий вас самих ответ.

Каждая задача — миниатюра, выстроенная вокруг одного физического вопроса. Задача начинается со вступления, которое обрисовывает тему, дает нужные сведения и, постепенно подводя вас к проблеме, завершается формулировкой вопроса. Затем следуют подсказки разной степени детализации. Потом — авторское решение, которое не всегда является единственно верным путем к ответу. И завершает сюжет послесловие: в нем тема развивается чуть дальше и приводятся ссылки на реальные исследования и публикации.

Тематическая группировка задач довольно условна. Скажем, в задачах из блока «Механика» встречаются и элементарные частицы, и гравитационные волны. Но и что из того? Это не учебник и не задачник для контроля усвоенного материала. Тут не скажешь: «Мы этого не проходили!» Это, скорее, ваш «туристический путеводитель» по избранным тропам современной физики — и то, как вы пройдете по каждой тропе, зависит от вашего любопытства и готовности преодолевать сложности. Конечно, задачи можно просто читать одну за другой, не затрудняя себя их решением, — и я надеюсь, что даже в таком режиме книжка окажется очень полезной. Но вы получите куда более полное впечатление, если все же остановитесь на несколько минут и попробуете самостоятельно справиться с задачей — а потом задержитесь еще раз, прочитав подсказки. В конце концов, и настоящее путешествие запоминается куда ярче, если вы весь маршрут проделаете пешком, а не промчитесь в автомобиле.

Так что — в путь, и удачи и удовольствий вам!

Игорь Иванов

Механика

★☆☆☆

1. Оптимизируйте коллайдер

Большой адронный коллайдер (БАК) — самый сложный научный прибор, построенный человеком. В нем протоны, разгоняясь до очень больших энергий, врезаются друг в друга, в результате чего рождаются новые необычные частицы, разлетающиеся в разные стороны из точек столкновений. Многометровые детекторы, словно гигантские микроскопы, разглядывают этот процесс: регистрируют частицы, измеряют их свойства и по ним восстанавливают картину соударений. Через такие столкновения мы и выясняем, из чего состоит и как функционирует Вселенная на самом мельчайшем масштабе. Мы задаем природе четко поставленные вопросы, и она, не в силах отвертеться, выдает свои фундаментальные секреты один за другим.

И хотя это, безусловно, самая передовая физика, мы начинаем книгу с задачи про коллайдер! И она будет вам по силам — потому что даже в сложнейших процессах встречаются очень простые явления. Признаемся по секрету: для решения этой задачи не требуется даже знание законов физики, поможет самая обыкновенная смекалка.

Задача

Но давайте сначала познакомимся с устройством коллайдера. На рис. 1 очень схематично изображено основное кольцо БАК. Реальное его устройство, конечно, сложнее, но для этой задачи мы намеренно упрощаем ситуацию. По кольцу навстречу друг другу циркулируют протонные пучки.

На самом деле они летают в двух близких вакуумных трубах, но для простоты будем считать, что все происходит в одной трубе. Каждый пучок состоит из отдельных компактных облачков (сгустков) протонов.

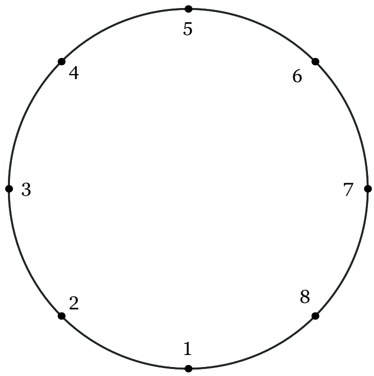

Рис. 1. Схема коллайдерного кольца с восемью точками пересечения встречных пучков

Будем считать, что в восьми точках вдоль кольца, расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга, траектории встречных пучков пересекаются, и там протоны могут сталкиваться друг с другом — если, конечно, сгустки пролетят сквозь эту область одновременно! Впрочем, даже если сгустки пересеклись, то это вовсе не значит, что все протоны из одного облачка столкнулись с протонами из другого. Они очень разреженные, так что подавляющее большинство протонов ни с кем не сталкивается, соударения испытывают только несколько протонов из многих миллиардов. Поэтому сгустки в целом просто проходят друг сквозь друга, продолжая лететь по своей траектории, и готовы встречаться на каждом обороте снова и снова.

А теперь представьте себе, что вы сидите в пультовой коллайдера и управляете запуском пучков в ускорительное кольцо. Вы можете послать в него несколько сгустков, причем не обязательно поровну в обоих направлениях. Считается, что все сгустки летят с одинаковой скоростью, но то, как именно они будут размещены на кольце, зависит только от вас! Ваша задача — сделать так, чтобы столкновения происходили во всех восьми точках.

Выясните, какое минимальное число сгустков надо запустить в кольцо коллайдера и как именно их расположить относительно друг друга, чтобы этого добиться.

Подсказка

Пожалуй, единственное, что можно здесь сказать, — эту задачу вполне решают обыкновенные школьники средних классов.

Решение

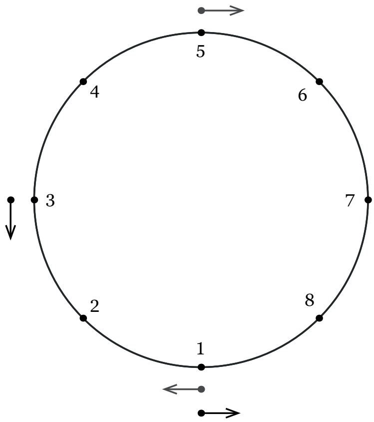

Рис. 2. Оптимальная последовательность сгустков в кольце

Первым делом подмечаем, что любая встречная пара сгустков, движущихся с одинаковой скоростью, будет встречаться на кольце ровно два раза в диаметрально противоположных точках. Если мы хотим задействовать таким образом восемь точек, то минимальное количество встречных пар — четыре.

Четыре встречные пары можно организовать двумя способами. Первый вариант: один сгусток в одну сторону, а четыре — в другую; всего пять сгустков. Второй вариант: в обе стороны летят по два сгустка — всего четыре. Значит, второй вариант более оптимальный.

Осталось подобрать взаимное расположение сгустков так, чтобы все четыре попарных комбинации встречались в указанных местах. Пример такого расположения показан на рис. 2. Это и есть решение задачи.

Послесловие

У решения есть одна неожиданная особенность: оно *менее симметрично*, чем постановка задачи. Никакого глубокого вывода отсюда не следует, но, как показывает опыт, бывает так, что эта несимметричность становится препятствием при поиске ответа: мозг подсознательно ожидает, что решение будет столь же симметричным, как и условие.

Любопытно, что и в реальности, на самых первых этапах запуска и отладки БАК применялась примерно такая схема.

В настоящем кольце этого коллайдера столкновения происходят не в восьми, а в четырех точках (с номерами 1, 2, 5, 8), вокруг которых построены крупные детекторы ATLAS, ALICE, CMS и LHCb. Но расположены они все равно в вершинах правильного восьмиугольника. Благодаря этому при запуске коллайдера можно было проверить работоспособность всех детекторов с минимальным количеством сгустков в пучках. А уже затем, когда техники убедились в стабильности пучков и надежности аппаратуры, они начали планомерно повышать интенсивность. В пике интенсивности в каждом пучке циркулируют более 2000 сгустков. Они следуют друг за другом с интервалом 25 наносекунд, то есть на расстоянии примерно восемь метров друг от друга, и заполняют практически все кольцо. Но подчеркнем, что даже при такой плотной загрузке столкновения происходят только в тех четырех местах, где две вакуумные трубы пересекаются.

Дополнительная информация

Подробную информацию на русском языке об устройстве и научных задачах Большого адронного коллайдера, а также связанную с ним ленту новостей можно найти в специальном проекте на сайте «Элементы»: *elementy.ru/LHC*

БАК — крупнейший, но далеко не единственный научный проект ЦЕРНа, Европейской организации ядерных исследований. О других научных исследованиях, технических разработках и образовательных мероприятиях ЦЕРНа можно узнать на его сайте: *home.cern*

★★★☆

2. Хоккейная задача

В прошлой задаче мы сразу нырнули в самую современную физику. А теперь давайте вынырнем и обратимся к повседневной жизни, поговорим о спорте. Спорт — это движение, а значит, в нем тоже можно углядеть интересные и подчас неожиданные физические явления. Возьмем, например, хоккей. При кистевом броске хоккеисты часто закручивают шайбу, так что она одновременно скользит по льду и вращается. Если движение шайбы не ограничивать размерами хоккейной коробки, то рано или поздно и вращение, и скольжение остановятся из-за трения о лед. Но что прекратится раньше?

Этот вопрос может удивить: неужели тут есть какие-то общие закономерности?! Да, есть, и мы сейчас их разберем.

Задача

Рассмотрим слегка упрощенную задачу. Пусть вместо шайбы у нас будет однородное узкое и плоское кольцо. Его запускают скользить по горизонтальной поверхности, придав некоторую начальную скорость и некоторое вращение (рис. 1). Между кольцом и поверхностью действует обычное сухое трение: сила трения пропорциональна прижимающей силе, не зависит от модуля скорости проскальзывания и направлена в противоположную от скорости сторону.

Выясните, что остановится раньше — скольжение или вращение кольца.

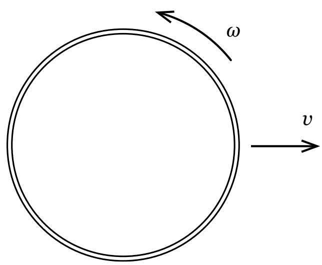

Рис. 1. Вращающееся тонкое кольцо скользит по горизонтальной поверхности (*вид сверху*)

Подсказка

Задача может показаться неприступной из-за того, что в условии практически ничего не задано. Нет ни размеров колечка, ни начальных скоростей скольжения и вращения, ни коэффициента трения. На самом деле, когда задача формулируется таким образом, это обычно служит намеком на то, что ответ не будет зависеть от конкретных параметров. Поэтому при решении вы сами можете взять какие-то значения для этих величин, но должны проследить, что они действительно исчезнут из ответа.

Кольцо участвует сразу в двух движениях: скользит и вращается. Из-за векторного сложения поступательного и вращательного движения разные части кольца движутся относительно поверхности в разные стороны (нарисуйте колечко, представьте, как оно движется, и убедитесь, что разные участки действительно в данный момент скользят по поверхности в разных направлениях). Поэтому выберите вначале какой-то маленький участок на кольце и сосчитайте силу трения, действующую именно на это место. Подумайте, как влияет эта сила на вращательное и поступательное движение, и попытайтесь усреднить эти два влияния по всему кольцу.

После этого проанализируйте формулы для трех случаев: когда скорости вращения и движения совпадают, а также когда скорость вращения очень мала или, наоборот, очень велика по сравнению с поступательным движением. Это наведет вас на мысль, как ответить на вопрос задачи.

Решение

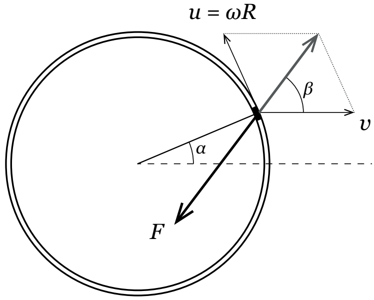

Рис. 2. Скорости и силы на маленьком участке кольца

Рассмотрим участок кольца, который находится под углом α к направлению движения (рис. 2). Пусть в данный момент времени скорость центра масс кольца равна v, а скорость вращения обода $u = \omega R$, где ω — угловая скорость вращения в данный момент, а R — радиус кольца. Этот кусочек кольца участвует в поступательном и вращательном движении. Его скорость относительно поверхности показана на рисунке серой стрелкой. Она составляет угол β с направлением поступательного движения, причем

$$\cos\beta = \frac{v - u\sin\alpha}{\sqrt{v^2 + u^2 - 2uv\sin\alpha}}, \quad \sin\beta = \frac{u\cos\alpha}{\sqrt{v^2 + u^2 - 2uv\sin\alpha}}.$$

Эти выражения выглядят громоздкими, но они получаются из обычных формул сложения двух векторов скоростей.

Сила трения, действующая на этот участок, по модулю равна $F = \mu mg$ (здесь m — масса участка кольца) и направлена в противоположную от скорости сторону. У этой силы есть проекция на направление поступательного движения, $-F\cos\beta$, и проекция на касательную к кольцу, которая притормаживает вращение, $-F\sin(\beta - \alpha)$. Не стесняясь, подставим сюда выражения для синуса и косинуса угла β, а также учтем, что $\sin(\beta - \alpha) = \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha$:

$$-F\cos\beta = -\mu mg\frac{v - u\sin\alpha}{\sqrt{v^2 + u^2 - 2uv\sin\alpha}},$$

$$-F\sin(\beta - \alpha) = -F\left(\frac{u\cos^2\alpha}{\sqrt{v^2 + u^2 - 2uv\sin\alpha}} - \frac{v\sin\alpha - u\sin^2\alpha}{\sqrt{v^2 + u^2 - 2uv\sin\alpha}}\right) =$$

$$= -\mu mg\frac{u - v\sin\alpha}{\sqrt{v^2 + u^2 - 2uv\sin\alpha}}.$$

У этой силы есть также проекция вбок, то есть перпендикулярно поступательному движению, но при усреднении по всему кольцу эта проекция обнулится. В этом можно убедиться математически, если рассмотреть второй участок, находящийся под углом $\pi - \alpha$. Для него построение аналогичное, две притормаживающие проекции будут такими же, а сила вбок — ровно противоположная.

Для того чтобы посчитать эффект для всего кольца в целом, надо сложить эти силы по всему кольцу, то есть учесть элементы кольца, расположенные под всеми углами α. Это даст нам два ускорения, притормаживающих поступательное движение и вращение:

$$a_v = -\mu g\left\langle\frac{v - u\sin\alpha}{\sqrt{v^2 + u^2 - 2uv\sin\alpha}}\right\rangle, \quad a_u = -\mu g\left\langle\frac{u - v\sin\alpha}{\sqrt{v^2 + u^2 - 2uv\sin\alpha}}\right\rangle.$$

Угловые скобки обозначают усреднение по всем углам α; это последствие того, что мы общую силу поделили на общую массу. При желании его можно выразить через интегралы, но это не обязательно.

Заметьте интересную особенность полученных формул: при замене u на v выражения для a_u и a_v превращаются друг в друга. Такая «дуальность» задачи автоматически означает, что если бы начальные скорости u и v были равны, то ускорения a_u и a_v тоже были бы одинаковые и, значит, соотношение $u = v$ выполнялось бы всегда, до самой остановки. А это, в свою очередь, означает, что *вращение и скольжение в данном случае прекратятся одновременно*. Смотрите, произошло математическое «чудо»: мы, просто глядя на формулы, вдруг получили ответ для нашей задачи, по крайней мере для одного начального состояния!

А что изменится, если начальные скорости u и v различаются? Тогда ускорения тоже будут отличаться, и, казалось бы, заранее не понятно, что будет замедляться быстрее. Чтобы выяснить, может ли при этом вращение остановиться раньше скольжения, рассмотрим ситуацию, когда скорость вращения u много меньше скорости поступательного движения v. Тогда для поступательного ускорения мы получим примерно $a_v = -\mu g$, словно вращения и не было. Для вращательного ускорения a_u получим маленькую величину порядка $-\mu g \cdot u/v$, поскольку «большой» вклад, пропорциональный синусу, обнулился после усреднения по всем углам (более точное выражение см. в послесловии). Иными словами, если вращение очень медленное, то оно и замедляется намного медленнее, чем скольжение. Можно сказать и так: *относительное замедление вращения* (a_u/u) *пропорционально относительному замедлению скольжения* (a_v/v). Отсюда и следует, что скольжение и вращение не могут прекратиться в разные моменты времени.

Выше мы отметили, что задача математически симметрична относительно замены поступательного движения на вращательное. Поэтому мы совершенно аналогичным способом получаем и второй вывод: если поступательное движение намного медленнее вращения, то и замедляться оно будет намного медленнее вращения. Соответственно, и в этом случае нет никакой возможности остановить скольжение раньше вращения.

Итак, ответ: вращательное и поступательное движение прекратятся одновременно вне зависимости от того, каковы были их начальные скорости.

Послесловие

Анализ формул можно немного продолжить. Когда u много меньше v, усреднение надо произвести более аккуратно, разложив знаменатель дроби в ряд по малому параметру u/v. Ответ для ускорения вращения окажется вдвое меньше той оценки, которую мы привели в ходе решения. Эти два ускорения можно поделить друг на друга и получить простое выражение:

$$\frac{a_u}{a_v} = \frac{u}{2v}.$$

Коэффициент 1/2 имеет вполне осязаемые последствия. Он меньше единицы, и отсюда получается, что отношение u/v, пусть поначалу очень маленькое, будет увеличиваться с течением времени. А поскольку задача математически симметрична относительно замены поступательного движения на вращательное, отсюда можно заключить, что если отношение u/v очень велико, то с течением времени оно будет уменьшаться. Мы приходим к простому выводу: какими бы ни были начальные скорости u и v, в процессе движения они будут не только синхронно уменьшаться (это мы уже установили в ходе решения), но и *все больше приближаться друг к другу*.

Для тех, кто знаком с дифференциальными уравнениями, отметим, что нечувствительность ответа к конкретному соотношению между начальными скоростями вращения и скольжения имеет простое математическое объяснение: уравнение для отношения u/v имеет «устойчивую неподвижную точку» при $u/v = 1$. Это значит, что, каким бы ни было начальное значение u/v, за счет взаимного влияния вращения и скольжения система сама стремится к этому значению в ходе эволюции во времени.

Если бы мы вместо кольца взяли однородный плоский диск, то вывод о существовании устойчивой неподвижной точки остался бы в силе, но ее значение сдвинулось бы и составило примерно 1,53. А если бы вместо плоского диска мы взяли выпуклую или вогнутую форму («чашку», поставленную прямо или вверх дном), то устойчивая неподвижная точка вообще исчезла бы, и тогда вращение и скольжение прекращались бы в разные моменты времени.

Любопытно, что эта довольно простая по постановке задача была проанализирована в деталях совсем недавно. Первые подробные расчеты были опубликованы в 1985 г., причем статья так и называлась: «К вопросу о движении хоккейной шайбы» [1]. Анализ более сложных случаев был проведен уже в 2000-х гг., и тогда же были поставлены прямые эксперименты, которые подтвердили расчеты [2]. Эта система оказалась неожиданно богата на явления, как с точки зрения математических законов (взаимное влияние поступательной и вращательной степеней свободы), так и возможных прикладных аспектов.

Дополнительная информация

Популярный рассказ о современных исследованиях этой простой на вид задачи можно найти в новостной заметке автора «Физики изучают удивительные законы скольжения вращающихся тел», «Элементы», 04.01.2006: *elementy.ru/link/slide*

Библиография

1. Voyenli K. and Eriksen E. On the motion of an ice hockey puck // American Journal of Physics, 1985, vol. 53, p. 1149. DOI: 10.1119/1.14071

2. Farkas Z., Bartels G., Unger T., and Wolf D. E. Frictional Coupling between Sliding and Spinning Motion // Physical Review Letters, 2003, vol. 90, 248302. DOI: 10.1103/PhysRevLett.90.248302

★★☆☆

3. Бесконечно длинный маятник

Один из самых простых школьных примеров колебаний — колебания математического маятника (см. рис. 1). Математический маятник — это просто точечная масса, подвешенная в поле тяжести на нерастяжимой нити длины L. Если его отклонить от вертикали на небольшой угол и отпустить, то он начнет колебаться туда-сюда с периодом $T = 2\pi\sqrt{L/g}$.

Как заметил еще Галилей, период колебаний не зависит от их амплитуды, по крайней мере до тех пор, пока эта амплитуда мала.

Из выписанной формулы следует, что чем длиннее маятник, тем больше период, то есть тем медленнее происходит колебание. Но может ли оно стать сколь угодно медленным?

Задача

Давайте рассмотрим совершенно гипотетическую, даже фантастическую постановку задачи: имеется математический маятник, длина его подвеса безумно велика и во много раз превышает радиус Земли. Сам точечный грузик при этом находится в лаборатории на уровне земли, но только точка подвеса унесена далеко — даже так: сколько угодно далеко — в космос! Для простоты будем считать, что Земля и точка подвеса — неподвижны. Это, конечно, слегка безумная и совершенно нереализуемая на практике ситуация, но мы имеем право рассмотреть такой мысленный эксперимент.

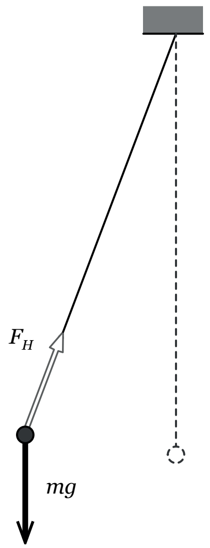

Рис. 1. Математический маятник в поле тяжести Земли. *Пунктиром* показано положение равновесия, *сплошной линией* — отклонение от него. Сила натяжения нити F_H и сила тяжести mg, складываясь, порождают возвращающую силу, которая и заставляет маятник колебаться

Вычислите период малых колебаний такого математического маятника бесконечной длины. Какой еще известный вам процесс имеет тот же период? **Объясните**, почему эти два совершенно разных типа движения имеют одинаковый период.

Подсказка 1

Ясно, что бесконечность подставлять в формулу нельзя, поскольку при выводе этой школьной формулы не предусматривалась такая экстремальная ситуация, которую мы предложили в задаче. Значит, надо формулу вывести еще раз — но только с учетом того, что радиус Земли много меньше длины маятника, а не наоборот.

Подсказка 2

Тут есть два подхода: стандартный метод расчета и маленькая хитрость.

Стандартный метод вычисления периода колебаний таков. Рисуем положение равновесия и положение с небольшим горизонтальным отклонением x от него. Выясняем, откуда берется возвращающая сила. Убеждаемся, что возвращающая сила линейно зависит от отклонения, и возникший коэффициент пропорциональности называем жесткостью: $F = -kx$. Жесткость, деленная на массу грузика, дает частоту ω в квадрате. Период — это $2\pi/\omega$.

Маленькая же хитрость заключается в том, что когда вы начнете следовать этой процедуре, то догадаетесь, что задача в некотором смысле эквивалентна исходной. И тогда вы сразу сможете написать ответ без вычислений.

Так или иначе, начните с рисунка исходного положения бесконечно длинного маятника, положения при отклонении от равновесия, нарисуйте силы и найдите возвращающую силу.

Решение

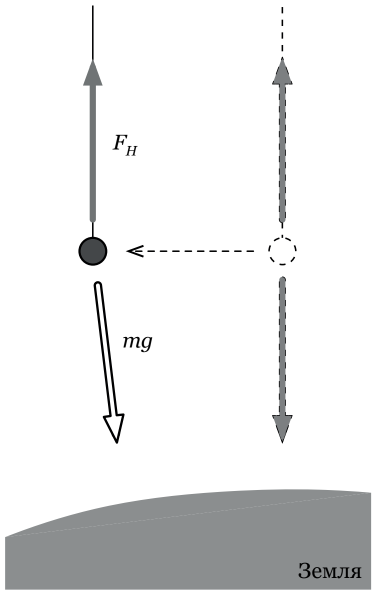

Рис. 2. Бесконечно длинный маятник в поле тяжести Земли

На рис. 2 изображен наш бесконечно длинный маятник. Пунктирной линией показано положение равновесия, сплошной — отклонение от него. Обратите внимание, что смещение вбок — строго горизонтальное, а не по дуге, как на рис. 1, поскольку расстояние до точки подвеса считается неограниченно большим.

Если бы поле тяжести было строго однородным, то есть всегда направленным вниз, как на рис. 1, то никакой возвращающей силы при строго горизонтальном смещении не возникло бы. Сила вбок возникает на рис. 2 потому, что реальное поле тяжести — неоднородное; сила тяжести направлена в каждой точке не строго вниз, а к центру Земли. При смещении грузика направление на центр отклоняется от вертикали, и именно отклонение от вертикали порождает возвращающую силу.

Обратите внимание, как поменялись ролями две силы! В обычной задаче (рис. 1) сила тяжести всегда направлена вниз, а сила натяжения нити в колеблющемся маятнике отклоняется от вертикали. Здесь все наоборот: направление нити, а значит, и сила ее натяжения все время остаются вертикальными, а отклоняется от вертикали уже сила тяжести. При этом, чтобы сила тяжести не изменялась по абсолютной величине, надо, чтобы угол отклонения был мал, то есть чтобы амплитуда колебания была много меньше радиуса Земли.

Эта неожиданная параллель между двумя ситуациями открывает нам короткий путь к ответу. Возвращающая сила возникает из-за горизонтального дисбаланса двух сил, то есть из-за ненулевого угла отклонения *одной силы относительно другой*. Этот угол точно такой же, как был бы в исходной школьной задаче с маятником в строго однородном поле тяжести и с длиной, равной радиусу Земли. Мы просто поменяли местами две силы, и задача теперь выглядит стандартной, но только с $L = R$. А это значит, что мы сразу пишем ответ: $T = 2\pi\sqrt{R/g}$, что после подстановки чисел дает примерно 85 минут.

Это выражение точь-в-точь совпадает с периодом движения спутников по круговой орбите вокруг Земли. И это, конечно, не случайность, как мы сейчас увидим.

Послесловие

В принципе, интуитивно понятно, что эти два вида движения — малые колебания туда-сюда бесконечно длинного маятника над поверхностью Земли и свободное движение спутника вокруг Земли — должны быть как-то связаны. В обоих случаях все определяется притяжением к Земле, да и размер в нашем распоряжении только один — ее радиус. Но все же для пущей убедительности хочется *увидеть*, как именно эти два движения связаны друг с другом, почему у них одинаковый период.

Эта связь проиллюстрирована на рис. 3. Суть в том, что при исследовании маятника нам надо выйти из «зоны комфорта», то есть из плоскости рисунка, и рассмотреть *трехмерное* движение. У математического маятника в трехмерном мире есть два направления колебаний с одинаковыми периодами. Поэтому можно запустить маятник так, чтобы он не колебался вперед-назад, а двигался по кругу. При таком круговом движении возвращающая сила играет роль центростремительной силы, которая и обеспечивает круговую траекторию. И период его, повторимся, точь-в-точь совпадает с периодом колебания туда-сюда, поскольку движение по кругу — это, по сути, два наложившихся друг на друга линейных колебания.

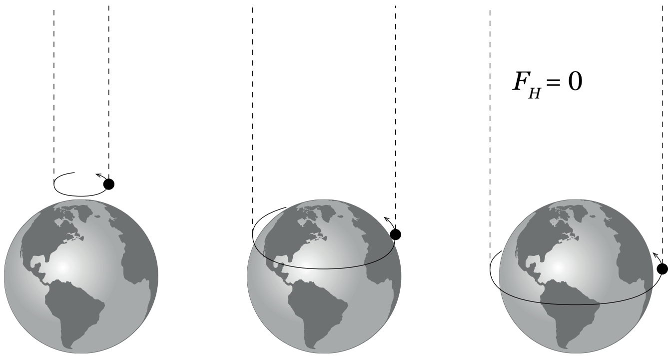

Рис. 3. Переход от колебания бесконечно длинного маятника к вращению вокруг Земли

Представьте, что мы такое круговое движение небольшой амплитуды запустили сначала по маленькому кругу над полюсом. Потом расширяем круг и одновременно смещаем грузик так, чтобы плоскость его движения рассекала Землю, а сам грузик по-прежнему двигался прямо над ее поверхностью (рис. 3). При таком смещении радиус круговой орбиты растет, но пропорционально ему растет и возвращающая сила. А если возвращающая сила линейно растет с отклонением, то и период колебаний не будет зависеть от амплитуды отклонения (снова вспоминаем Галилея). Значит, и в нашем случае такого кругового колебания маятника, опоясывающего Землю, период остается тем же. С другой стороны, с ростом охвата сила натяжения нити ослабевает, поскольку вертикальная (вдоль нити) компонента силы тяжести уменьшается. Наконец, когда мы сместимся к экватору, сила натяжения нити исчезнет, и мы как раз получим свободное движение по орбите вокруг Земли. А период движения останется ровно тем же, с которого мы и начинали.

В этой задаче можно увидеть связь еще с одним механическим явлением. Зададимся вопросом: какие, собственно, силы играют роль возвращающих в нашей задаче? Ответ прозвучит несколько неожиданно — это *приливные силы* со стороны Земли. Приливные силы как раз и возникают из-за неоднородности притяжения со стороны массивного объекта. Стандартное рассмотрение показывает, что эти силы действуют на тело (протяженное, не точечное!) так: они его растягивают вдоль направления на Землю и сплющивают — поперек. В нашем случае направление на Землю не важно, там все ограничено нитью. А вот сплющивание в горизонтальной плоскости как раз и порождает возвращающие силы. Обратите внимание, что приливные силы ощущаются не в фиксированной точке, а в ее окрестности. Именно поэтому приливные силы влияют на колеблющийся маятник, который в своем движении как бы прощупывает протяженную область пространства вблизи положения равновесия.

И напоследок — резкий прыжок на передний край физики, к недавно открытым гравитационным волнам. Когда гравитационная волна проходит сквозь тело, то она вызывает ровно такие же деформации, как и приливные силы. Условно говоря, гравитационные волны — это волны приливных деформаций, оторвавшиеся от источника и улетевшие прочь. Эта аналогия основывается на том, что поле деформаций метрики в гравитационной волне описывается ровно теми же компонентами тензора Римана, что и приливные силы от статического гравитационного поля. И тогда еще более наглядным становится тот факт, что гравитационные волны невозможно зарегистрировать в точке; для их регистрации нужен именно *протяженный* объект.